

Title	函数方程式 $f(f(x))=F(x)$ 二就テ
Author(s)	宇野, 利雄
Citation	全国紙上数学談話会. 59 p.12-p.15
Issue Date	1935-09-27
oaire:version	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.18910/74132">https://doi.org/10.18910/74132</a>
rights	
Note	

*Osaka University Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

## 210. 函數方程式 $f(f(x))=F(x)$ = 就テ

守野利雄 (商船)

南雲君が 57 号 1977 デ話サレタ上誌ノ函數方程式ハ僕  
モ前ニ考ヘタコトガアルノデ未整理、未完成ノマコナガラ、  
何カノ材料ニモトソレヲ報告シマス。

$f(f(x))=F(x)$  ノ解ヲ用ヒテ  $y=f(x)$  ナル曲線ヲ  
考ヘテ見ルト、コレハ次ノ如キ二変數 *Iteration* ノ不変  
曲線トナル。

但シ不変曲線トハコノ *Iteration* ヲ施シタトキ、コ  
ノ曲線上ノ点ガ再ビコノ曲線上ノ点トナルモノノコトヲイフ。  
コノ点ハ特別ナ場合ニハソレ自身ニ一致スル (不変点) が、  
一般ニハ違ツテオテヨイ。サテ今ノ場合ノ *Iteration*  
ハ

$$(1) \begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = F(x_n) \end{cases}$$

ノ如キモノデアル。何トナレバ  $y_n = f(x_n)$  ナル如キ点  $(x_n, y_n)$  ヲ考ヘテ見ルト、 $f(x)$  が上記函数方程式ノ解ナルコトヨリ、

$$f(y_n) = F(x_n)$$

従ツテ  $f(x_{n+1}) = y_{n+1}$

トナリ、 $(x_n, y_n) = (1)$  ヲ施シタ  $(x_{n+1}, y_{n+1})$  が矢張り同シ曲線  $y = f(x)$  ノ上ニナルコトナル。

一例トシテ  $f(f(x)) = x$  ヲトル、コノ場合ニ相當スル Iteration

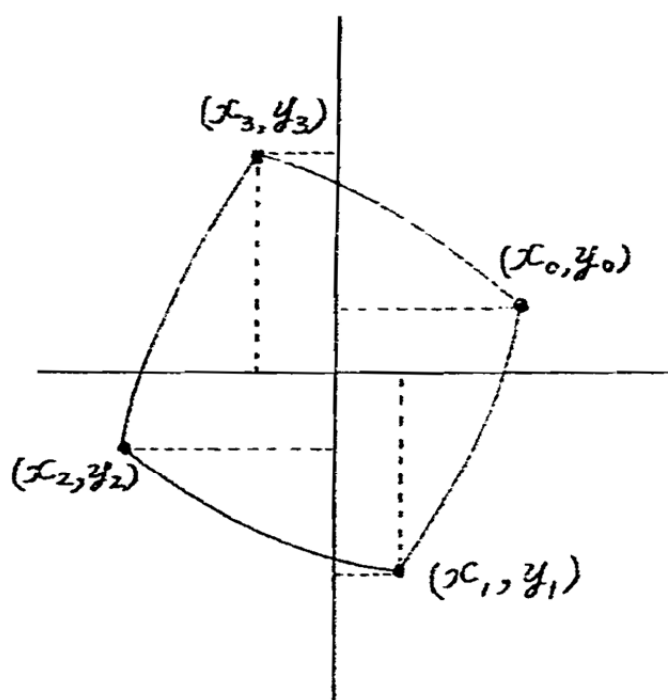
$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = x_n \end{cases}$$

ニツイテハ  $y = x$  ニツイテ對稱ナ曲線ハスベテ不変曲線ニナル、コノ中カラ  $f(f(x)) = x$  ニ適合スルモノヲトルニ、増加函数デハ  $y = x$  が唯一トナリ、他ハ單調減少デ  $y = x$  ニツキ對稱ナラバスベテ  $f(f(x)) = x$  ノ解トナルヲデアル、コノ他ノモノデハ  $y = f(x)$  が多價トナリ  $f(f(x))$  ノ意味が定メ難クナル。

次ニ  $f(f(x)) = -x$  ヲ例トスル、コノ場合ノ Iteration

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = -x_n \end{cases}$$

ハ原点ヲ中心トスル右  $90^\circ$  廻轉デアリ、一点  $(x_0, y_0)$  ノ  
*Iteration* ハ図ノヤウニ原点ヲトリ囲ンデ排列シ



$y = f(x)$  が一順デア  
 レヤウナ不変曲線  
 が得ラレナクナル様  
 デアル。

但シコレハ *real*  
 デノ話デアルが、複  
 素変数ヲ使ヘバ

$$f(x) = ix \text{ ノ如キ}$$

$$\text{ハ明} = f(f(x)) = -x$$

ノ解ニナル。

コノ際ハ  $y = ix$  ガ *Iteration*  $x_{n+1} = y_n$ ,  
 $y_{n+1} = -x_n$  ノ不変曲線ニナツテアル。

話ヲ *analytic* ト制限スルト、事ハ大分具体的ニナ  
 リサウダが、コノ際ハ *Iteration* (1) ノ不変点  $(\xi, \eta)$   
 即チ

$$\begin{cases} \xi = \eta \\ \eta = F(\xi) \end{cases}$$

ノ根ガ役目ヲツトメサウダ、コノ周囲デ  $F(x)$  ヲ次ノ如ク展  
 開シ

$$F(x) = \xi + a(x - \xi) + \dots$$

トシテ (1) ヲ書ケト

$$(1) \begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = \xi + a(x_n - \xi) + \dots \end{cases}$$

更 =  $f(x)$  7

$$f(x) = \xi + k(x - \xi) + \dots$$

ノ如ク書イテ,  $y = f(x)$  が上記 (1) デ不変ナコトヲ 証セバ

$$\begin{cases} x_{n+1} = \xi + k(x_n - \xi) + \dots \\ \xi + k(x_{n+1} - \xi) + \dots = \xi + a(x_n - \xi) + \dots \end{cases}$$

之カラ  $x_{n+1}$  ヲ消去スレバ

$$k^2(x_n - \xi) = a(x_n - \xi) + \dots$$

故 =  $k^2 = a$  トナル。

即チ  $F'(\xi)$  カラ  $f'(\xi)$  が  $\pm\sqrt{F'(\xi)}$  トシテ得ラレル譯デアル。  $f(f(x)) = -x$  ノ例 = オケル  $f(x) = ix$  ハ丁度コレ = 當ツテキル。(但シコノ証ハ  $F'(\xi) \neq 0$ )

以上大分 rough ナ話デアルが, 余暇アラバ追々コレヲ引キシメ, マトメテ行キタク思ツテマシマス。